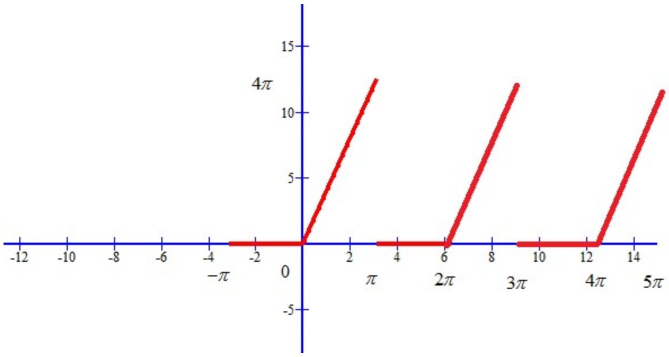
Trường ĐH Sư Phạm Kỹ Thuật Tp HCM — **Đáp án môn: TOÁN A1 (MATH130101)**
Khoa KHUD-Bộ môn Toán — **Ngày thi: 25/12/2017**

Câu	Ý	Nội dung	Thang điểm
1		Đặt $z=a+bi$ ta có: $z+2\overline{z}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ $\Leftrightarrow a+bi+2a-2bi=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\ -b=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$	0,5
		Chuyển về dạng lượng giác: $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i.\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ Thì $z^{2018}=\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i.\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^{2018}=\cos\left(-\dfrac{1009\pi}{3}\right)+i.\sin\left(-\dfrac{1009\pi}{3}\right)$	0,5
2		$x>0$: $f(x)=\dfrac{x\left(e^{3x}-1\right)}{\ln\left(2x^2+1\right)}$ là hàm số sơ cấp nên liên tục trên $(0;+\infty)$ $x<0$: $f(x)=2\cos x+m$ là hàm số sơ cấp nên liên tục trên $(-\infty;0)$	0,5
		Để hàm số liên tục trên R thì hàm số phải liên tục tại x=0. Xét: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\left(e^{3x}-1\right)}{\ln\left(2x^2+1\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x.3x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ (VCB – giải thích) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2\cos x+m)=2+m$ $f(0)=2\cos0+m=2+m$	0,5
		Hàm số liên tục tại x = 0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$ $\Leftrightarrow 2+m=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$	0,5

3		$\ln(1+2x)=2x-\frac{2^2.x^2}{2}+\frac{2^3.x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{2^n.x^n}{n}+0(x^n)$ $\frac{1}{5+x}=\frac{1}{5}.\frac{1}{1+\frac{x}{5}}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{x}{5}+\frac{x}{5^2}{}^{2}-...+(-1)^n\frac{x}{5^n}{}^{n}+0(x^n)\right)$ $=\frac{1}{5}-\frac{x}{5^2}+\frac{x}{5^3}{}^{2}-...+(-1)^n\frac{x}{5^{n+1}}{}^{n}+0(x^n)$	0,5 0,25
		$f\left(x\right)=\ln\left(1+2x\right)-\frac{1}{5+x}$ $=2x-\frac{2^2.x^2}{2}+\frac{2^3.x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{2^n.x^n}{n}$ $-\left(\frac{1}{5}-\frac{x}{5^2}+\frac{x}{5^3}{}^{2}-...+(-1)^n\frac{x^n}{5^{n+1}}\right)+0(x^n)$ $=-\frac{1}{5}+\frac{51}{25}x-\frac{251}{125}x^2+...+\left[\frac{(-1)^{n-1}.2^n}{n}-\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\right].x^n+0(x^n)$	0,25
		$\frac{f^{(5)}(0).x^5}{5!}=\left[\frac{(-1)^{n-1}.2^n}{n}-\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\right].x^n \Rightarrow n=5$ $f^{(5)}(0)=\left[\frac{(-1)^{5-1}.2^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5^{5+1}}\right].5!=\frac{5!(10^5+1)}{5^6}$	0,5
4	1	$I=\int_0^{+\infty}t.e^{-2t}dt=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b t.e^{-2t}dt$ Đặt $\begin{cases}u=t\\dv=e^{-2t}dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\v=\frac{e^{-2t}}{-2}\end{cases}$	0,5
		$I=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{t.e^{-2t}}{2}\Big\|_0^b+\frac{1}{2}\int_0^b e^{-2t}dt\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b.e^{-2b}}{2}-\frac{1}{4}.e^{-2t}\Big\|_0^b\right)$ $=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b.e^{-2b}}{2}-\frac{1}{4}.e^{-2b}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$	0,5

	2	$I=\int_0^{+\infty}\frac{3+\sin 2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int_0^{2}\frac{3+\sin 2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\,dx+\int_2^{+\infty}\frac{3+\sin 2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\,dx=I_1+I_2$ Xét $I_1=\int_0^{2}\frac{3+\sin 2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. Hàm dưới dấu tích phân là hàm không âm. Ta có: $x\to 0:\frac{3+\sin 2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\sim\frac{3+0}{2.\sqrt[3]{x^2}}\ (VCB)$. Mà $\int_0^{2}\frac{3}{2.\sqrt[3]{x^2}}dt$ hội tụ do $(\alpha=\frac{2}{3}<1)$ nên I_1 hội tụ (TCSS2)	0,5
		Xét $I_2=\int_2^{+\infty}\frac{3+\sin 2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. Ta có : $0\le\frac{3+\sin 2x}{x^4+2.\sqrt[3]{x^2}}\le\frac{4}{x^4}\quad;\forall x\in[2;+\infty)$ Mà $\int_2^{+\infty}\frac{3}{x^4}dt$ hội tụ do $(\alpha=4>1)$ nên I_2 hội tụ (TCSS1) Kết luận: I hội tụ	0,5
5	1	$u_n=\frac{4^n.(n+2)}{n!}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3).4^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{(n+2).4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3).4}{(n+1).(n+2)}=0<1$	0,5 0,25
		Suy ra chuỗi hội tụ (theo tiêu chuẩn D'Alembert)	0,25
	2	Đặt X=x-3 ta được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{X^n}{7^n\left(n^2+1\right)}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n\left(n^2+1\right)}{7^{n+1}((n+1)^2+1)}=\frac{1}{7}\Rightarrow R=7$ Khoảng hội tụ là $-4<x<10$	0,25
		Tại $x=-4:\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-7)^n}{7^n(n^2+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz (giải thích) Tại $x=10:\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{7^n.(n^2+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)}$ xét $\frac{1}{n^2+1}\sim\frac{1}{n^2};n\to\infty$ Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ (do $\alpha=2>1$) nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)}$ hội tụ (TCSS2) Vậy miền hội tụ là : $x\in[-4;10]$	0,5 0,25

6		Chu kì $T = 2\pi$ Vẽ hình :  Điểm gián đoạn là $x = (2k+1)\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$, ta có tại điểm gián đoạn thì : $S = \dfrac{0+4\pi}{2} = 2\pi$. Tại các điểm $x \neq (2k+1)\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$ $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4x dx = 2\pi$ $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4x\cos nx\, dx$ $= \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{4x.\sin nx}{n}\Bigg\|_0^{\pi} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi} 4\sin nx\, dx\right) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{4\cos nx}{n^2}\Bigg\|_0^{\pi}\right) = \dfrac{4\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}$	0,5
		$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4x\sin nx\, dx$ $= \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{4x.\cos nx}{n}\Bigg\|_0^{\pi} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi} 4\cos nx\, dx\right) = -\dfrac{4.(-1)^n}{n}$ Vậy khai triển Fourier tại những điểm $x \neq (2k+1)\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$ $f(x) = \pi + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}\cos nx - \dfrac{4.(-1)^n}{n}\sin nx\right)$	0,5
7		Gọi x (km) là khoảng cách giữa tàu 2 và B Gọi y (km) là khoảng cách giữa tàu 1 và B Gọi z (km) là khoảng cách giữa tàu 1 và 2 $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}\ ;\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt}\ ; h'(t) = \dfrac{dh}{dt}$ $x^2 + y^2 = h^2$ $2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = 2h\dfrac{dh}{dt}$ $x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} = h\dfrac{dh}{dt}$	0,5

		Lúc 4 giờ sáng: $x = DB = 2.20 = 40\,(km);\dfrac{dx}{dt} = 20\ (km/h)$ (do x tăng) $y = 100 - AC = 100 - 2.30 = 40\ km\ \ ;\ \dfrac{dy}{dt} = -30\ (km/h)$ (do y giảm) $h = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{40^2 + 40^2} = 40\sqrt{2}$ $x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} = h\dfrac{dh}{dt}$ $\Leftrightarrow 40.20 - 40.30 = 40.\sqrt{2}.\dfrac{dh}{dt} \Leftrightarrow \dfrac{dh}{dt} = -5\sqrt{2}\ \ (km)$ Vậy ở thời điểm 4 giờ sáng, khoảng cách giữa 2 tàu thay đổi là $-5\sqrt{2}\ \ (km)$	0,5